2-3 数列の極限の性質②

Point!

❗ 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が n の多項式であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ のとき,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ は **最も次数が大きい項** をくくりだして求める。

❗ 分数式で表される数列の極限は, **分母** の **最も次数が大きい項** で分母と分子をわる。

❗ 根号を含む差で表される数列の極限は, 分母や分子を **有理化** して求める。

$$\begin{aligned} \langle \text{例} \rangle \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{2n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{2n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{2n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n+2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{2n}} \end{aligned}$$

Warm Up

次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 - 6n)$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 2}{2n^2 + 1}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{n^2 + 3n} - n}$

解説

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 - 6n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(3 - \frac{6}{n} \right)$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} 3n^2 = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} 6n = \infty$
 最も次数が大きい n^2 でくくりだす

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{6}{n} \right) = 3$ より,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n} = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 - 6n) = \infty$
 $\infty \times (\text{定数}) = \infty$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 2}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}}$
 分母の最も次数が大きい n^2 で分母と分子をわる

$= \frac{3-0+0}{2+0}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$

$= \frac{3}{2}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{n^2 + 3n} - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3(\sqrt{n^2 + 3n} + n)}{(\sqrt{n^2 + 3n} - n)(\sqrt{n^2 + 3n} + n)} \right)$
 根号を含む差があるので有理化する

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(\sqrt{n^2 + 3n} + n)}{3n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n} + n}{n}$
 分母の最も次数が大きい n で分子と分母をわる
 $\sqrt{n^2} = n$ であることに注意する

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1}{1}$

$= \frac{\sqrt{1+0} + 1}{1}$

$= 2$

Try

次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n - n^3)$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - 2n^2 + 1}{3n^3 + 4n}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 4n} - n)$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n^2 + 4n} - n}$

2

極
限

Exercise

次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 - 2n)$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-4n^3 + 3n^2)$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 + 3}{n^2}$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 3n^2}{n^2 + 4n}$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 3n})$

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n})$

(7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n}$

(8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 - 2n}}$

2-4 和を含む分数式の極限

Point!

❗ 和の記号 Σ の公式 (数学 B の復習)

$$\sum_{k=1}^n c = nc \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

❗ 和を含む分数式の極限は、 Σ の公式を用いて和を求めてから計算する。☞

Warm Up

次の極限を求めなさい。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

解説 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{n^2}$ Σ の公式を使って和を求める

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}$$
 展開する
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}{n^2}$$
 n^2 で分母と分子をわる
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}}{1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + 0}{1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Try

次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+7+\cdots+(4n-1)}{3+5+\cdots+(2n+1)}$

Exercise

次の極限を求めなさい。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+2}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2(2n+1)}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2+2 \cdot 5+\cdots+n(3n-1)}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$