1-15 位置ベクトル①

Point!

- 平面上の基準点 O から，別の点 A へのベクトルを点 A の**位置ベクトル**といい，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と表す。
  $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$ とするとき，点 A を A$(\vec{a})$と表す。また，基準点 O はどこに定めてもよい。
- 線分 AB の内分点，中点，外分点をそれぞれ C，M，D とすると，各点の位置ベクトルは次の式で求まる。

$s:t$ に内分する点 C

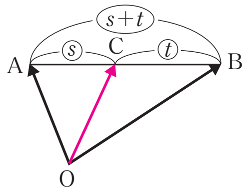
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{s+t}$$

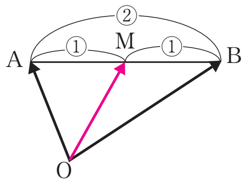
中点 M

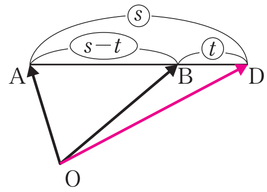
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$

$s:t$ に外分する点 D

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{-t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{s-t}$$







- △ABC の重心 G の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$

  3 つの頂点の位置ベクトルの和を 3 でわる

- 位置ベクトルの問題で，点 O 以外が始点のベクトルは，まず 始点 を O にする。
  〈例〉 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

  $\overrightarrow{\mathrm{A\,B}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$
  前後　後ー前

Warm Up

3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$を頂点とする△ABC について，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表しなさい。

(1) 線分 AB を 1：2 に内分する点 D の位置ベクトル
(2) 線分 BC の中点 M の位置ベクトル
(3) 線分 CA を 2：3 に外分する点 E の位置ベクトル
(4) △ABC の重心 G の位置ベクトル
(5) $\overrightarrow{\mathrm{GM}}$

解説

(1) $$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2\times\overrightarrow{\mathrm{OA}}+1\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1+2}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$$

(2) $$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

(3) $$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{-3\times\overrightarrow{\mathrm{OC}}+2\times\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{2-3}=\frac{-3\vec{c}+2\vec{a}}{-1}=3\vec{c}-2\vec{a}$$

(4) $$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

(5) $$\overrightarrow{\mathrm{GM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{6}$$

Try

3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)を頂点とする△ABC について，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表しなさい。

(1) 線分 BC を 2：3 に内分する点 D の位置ベクトル

(2) 線分 AB の中点 M の位置ベクトル

(3) 線分 AB を 3：2 に外分する点 E の位置ベクトル

(4) △ADM の重心 G の位置ベクトル

(5) $\overrightarrow{DE}$

Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)を頂点とする△ABC について，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表しなさい。

① 線分 CA を 2：1 に内分する点 D の位置ベクトル

② 線分 BC の中点 M の位置ベクトル

③ 線分 AB を 4：1 に外分する点 E の位置ベクトル

④ △ABC の重心 G の位置ベクトル

⑤ $\overrightarrow{GM}$

(2) 3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)を頂点とする△ABC について，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表しなさい。

① 線分 BC を 5：2 に内分する点 D の位置ベクトル

② 線分 AB の中点 M の位置ベクトル

③ 線分 AB を 2：3 に外分する点 E の位置ベクトル

④ △AEM の重心 G の位置ベクトル

⑤ $\overrightarrow{GE}$

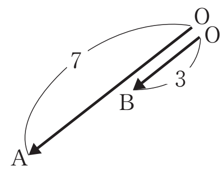
1-17 3点が一直線上にある条件

Point!

3点O，A，Bが一直線上にあるとき，$\overrightarrow{OB}=$ $k\overrightarrow{OA}$ （kは実数）となる。

kは**長さの倍率**を表す。

〈例〉右の図で，$\overrightarrow{OB}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{OA}$

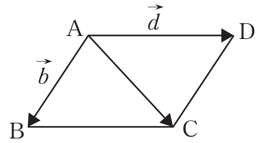


平行四辺形や三角形などの図形がある場合は，1つの頂点（どの頂点でもよい）を基準とした位置ベクトルを考える。

また，基準とした頂点を含む2辺上のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{d}$ などとおき，この2つのベクトルを用いて他のベクトルを表す。

〈例〉平行四辺形ABCD →点Aを基準として，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。

$\overrightarrow{AC}=$ $\vec{b}+\vec{d}$

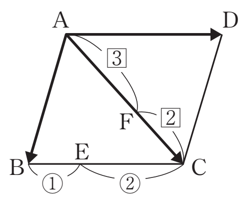


Warm Up

平行四辺形ABCDにおいて，辺BCを1：2に内分する点をE，対角線ACを3：2に内分する点をFとする。このとき，3点D，E，Fは一直線上にあることを証明しなさい。

解説 3点D，E，Fが一直線上にあることを証明するには，$\overrightarrow{DF}=k\overrightarrow{DE}$ と表せることを示せばよい。

点Aを基準として，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とし，$\overrightarrow{DF}$ と $\overrightarrow{DE}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ を用いて表す。



［証明］

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。

$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}$

点Aを基準とする位置ベクトルで表す
$\overrightarrow{AF}$ の長さは $\overrightarrow{AC}$ の長さの $\dfrac{3}{5}$ 倍

$=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$

$=\dfrac{3}{5}(\vec{b}+\vec{d})-\vec{d}$

$=\dfrac{3\vec{b}-2\vec{d}}{5}$ ……①

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}$

EはBCを1：2に内分する点

$=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{1+2}-\overrightarrow{AD}$

$=\dfrac{2\vec{b}+(\vec{b}+\vec{d})}{3}-\vec{d}$

$=\dfrac{3\vec{b}-2\vec{d}}{3}$ ……②

①，②より，$\overrightarrow{DF}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{DE}$

$\dfrac{3\vec{b}-2\vec{d}}{5}=\dfrac{3\vec{b}-2\vec{d}}{3}\times\dfrac{3}{5}$

したがって，3点D，E，Fは一直線上にある。

Try

次の問いに答えなさい。

(1) 平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 3：2 に内分する点を E，対角線 BD を 5：2 に内分する点を F とする。このとき，3 点 A，E，F は一直線上にあることを証明しなさい。

(2) △ABC において，辺 AB を 2：3 に内分する点を P，辺 BC を 3：1 に外分する点を Q，辺 CA を 1：2 に内分する点を R とするとき，3 点 P，Q，R は一直線上にあることを証明しなさい。

Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 1：2 に内分する点を E，辺 BC を 3：1 に外分する点を F とする。このとき，3 点 A，E，F は一直線上にあることを証明しなさい。

(2) 平行四辺形 ABCD において，辺 AB の中点を E，線分 ED を 1：2 に内分する点を F とする。このとき，3 点 A，F，C は一直線上にあることを証明しなさい。

(3) 平行四辺形 ABCD において，辺 BC を 3：2 に内分する点を E，辺 CD を 2：5 に外分する点を F とする。このとき，3 点 A，E，F は一直線上にあることを証明しなさい。

(4) △ABC において，辺 AB を 1：2 に内分する点を P，辺 BC を 2：1 に外分する点を Q，辺 AC の中点を R とするとき，3 点 P，Q，R は一直線上にあることを証明しなさい。

(5) △ABC において，辺 AB を 3：1 に内分する点を P，辺 AC を 1：2 に内分する点を Q，線分 BQ を 1：2 に内分する点を R とするとき，3 点 P，R，C は一直線上にあることを証明しなさい。

(6) △ABC において，辺 AB を 5：2 に内分する点を D，辺 AC を 5：3 に内分する点を E，△ABC の重心を G とするとき，3 点 D，G，E は一直線上にあることを証明しなさい。