2-4 確率変数の分散

Point!

確率変数 X の各値と期待値 m との差を，確率変数 X の偏差という。

確率変数 X の偏差の 2 乗 $(X-m)^2$ の期待値を，X の **分散** といい，$V(X)$ と表す。

$V(X)=E((X-m)^2)$

分散 $V(X)$ は，確率変数 X のとる値が x の期待値 $E(X)$ からどの程度ばらついているかを表す量で，分散が **小さい** ほど，確率変数のとる値が平均値に集まっていることを表す。

分散 $V(X)$ は，次の式でも計算できる。

$V(X)=$ $E(X^2)-\{E(X)\}^2$ （X^2 の期待値）$-$（X の期待値）^{2}

Warm Up

赤玉 4 個と黒玉 3 個が入っている箱の中から，玉を 1 個ずつもとに戻さずに 2 回続けて取り出すとき，黒玉が出る回数を X とする。このとき，確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めなさい。

解説 必ず確率分布の表をかいて考える。

X	0	1	2	計
P	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$	$\frac{6}{42}$	1

上の表より，

$$E(X)=0\times\frac{12}{42}+1\times\frac{24}{42}+2\times\frac{6}{42}=\frac{36}{42}=\frac{6}{7}$$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$ なので，

$$E(X^2)=0^2\times\frac{12}{42}+1^2\times\frac{24}{42}+2^2\times\frac{6}{42}=\frac{8}{7}$$

よって，$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$$=\frac{8}{7}-\left(\frac{6}{7}\right)^2=\frac{20}{49}$$

$E(X)=\frac{6}{7}$，$V(X)=\frac{20}{49}$

Try

次の確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めなさい。

(1) 1 から 8 までの数字が書かれたカードが 1 枚ずつある。このカードをよく混ぜて 1 枚を抜き出すとき，そのカードの数字 X

(2) 9 本のくじのうち 2 本が当たりくじである。このくじを同時に 3 本ひくとき，その中に含まれる当たりくじの本数 X

Exercise

次の確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めなさい。

(1) 1 から 7 までの数字が書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつある。このカードを裏向きにして 1 枚抜き出すとき，そのカードに書かれた数字 X

(2) 10 本のくじのうち 3 本が当たりくじである。このくじを同時に 4 本ひくとき，その中に含まれる当たりくじの本数 X

(3) 白玉 3 個と赤玉 4 個が含まれる箱の中から，同時に 3 個の玉を取り出すとき，その中に含まれる赤玉の個数 X

(4) 1 から 4 までの数字が書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつある。この中から 2 枚のカードを取り出したとき，それらに書かれた数の和 X

(5) 大小 2 個のさいころを投げて，出た目の差の絶対値 X

(6) 赤玉 5 個と青玉 4 個が入っている袋の中から，玉を 1 個ずつ，もとに戻さずに 2 回続けて取り出すとき，青玉が出る回数 X

2-7 確率変数の変換②

Point!

確率変数 X に対し，1 次式 $aX+b$ も確率変数であり，次の式が成り立つ。

$aX+b$ の期待値　$E(aX+b)=$ $aE(X)+b$

$aX+b$ の分散　$V(aX+b)=$ $a^2V(X)$

$aX+b$ の標準偏差　$\sigma(aX+b)=$ $|a|\sigma(X)$

Warm Up

次の問いに答えなさい。

(1) 50 円玉を 2 枚投げて，表が出た枚数分の金額をもらえるというゲームがある。30 円払ってこのゲームを 1 回行うとき，参加費を差し引いた賞金額の期待値と標準偏差を求めなさい。

(2) 3 枚の硬貨を同時に投げて，裏が出た枚数を X とする。$Y=aX+b$ とするとき，確率変数 Y の期待値が $7\sqrt{3}$，標準偏差が 3 となるような a，b の値を求めなさい。ただし，$a>0$ とする。

解説 (1) 表が出た枚数を X とすると，その確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

左の表より，$E(X)=1$，$E(X^2)=\frac{3}{2}$ なので，

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

次に，参加費を差し引いた賞金額を Y とすると，　$Y=aX+b$ の形で表す

$Y=50X-30$ と表せる。

よって，Y の期待値は，$E(Y)=E(50X-30)=50\times1-30=20$

Y の標準偏差は，$\sigma(Y)=\sigma(50X-30)=|50|\times\frac{\sqrt{2}}{2}=25\sqrt{2}$

期待値：20，標準偏差：$25\sqrt{2}$

(2) X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

左の表より，$E(X)=\frac{3}{2}$，$E(X^2)=3$ なので，

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$E(aX+b)=7\sqrt{3}$ より，$aE(X)+b=7\sqrt{3}$ だから

$\frac{3}{2}a+b=7\sqrt{3}$ ……①

また，$\sigma(aX+b)=3$ より，$|a|\sigma(X)=3$ だから，　$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

$\frac{\sqrt{3}}{2}|a|=3$　$a>0$ より，$\frac{\sqrt{3}}{2}a=3$ ……②

①，②を解いて，$a=2\sqrt{3}$，$b=4\sqrt{3}$

Try

次の問いに答えなさい。

(1) 赤玉 4 個，黒玉 3 個が入っている箱から，同時に 2 個の玉を取り出し，黒玉が出ると 1 個につき 20 円をもらえるというゲームがある。10 円払ってこのゲームを 1 回行うとき，参加費を引いた賞金額の期待値と標準偏差を求めなさい。

(2) さいころを 1 回投げて出た目の数を X とする。$Y=aX+b$ とするとき，確率変数 Y の期待値が 0，標準偏差が $\sqrt{10}$ となるような a，b の値を求めなさい。ただし，$a>0$ とする。

Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 原点 O から出発して数直線上を動く点 P がある。硬貨を投げて表が出たら点 P は $+2$ だけ移動し，裏が出たら -1 だけ移動する。硬貨を 3 回投げたときの，点 P の座標の期待値と分散を求めなさい。

(2) 白玉 5 個，赤玉 4 個が入っている袋から，同時に 3 個の玉を取り出し，赤玉が出ると 1 個につき 30 円をもらえるというゲームがある。20 円払ってこのゲームを 1 回行うとき，参加費を引いた賞金額の期待値と標準偏差を求めなさい。

(3) 100 円玉を 2 枚投げて，表が出た枚数分の金額をもらえるというゲームがある。100 円を払ってこのゲームを 1 回行うとき，参加費を差し引いた賞金額の期待値と標準偏差を求めなさい。

(4) さいころを 1 回投げて出た目の数を X とする。$Y=aX+b$ とするとき，確率変数 Y の期待値が $3\sqrt{21}$，標準偏差が $\sqrt{5}$ となるような a，b の値を求めなさい。ただし，$a>0$ とする。

(5) 2 枚の硬貨を同時に投げて，表が出た枚数を X とする。$Y=aX+b$ とするとき，確率変数 Y の期待値が $12\sqrt{2}$，標準偏差が 8 となるような a，b の値を求めなさい。ただし，$a>0$ とする。