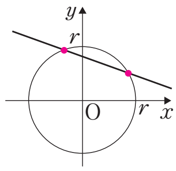
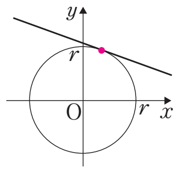
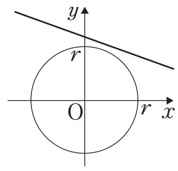
円と直線の共有点①

Point!

円と直線の共有点の座標や個数を求めるときは，円の方程式と直線の方程式を連立させる。

・座標を求めるときは，連立方程式の解を求める。

・個数を求めるときは，2 次方程式をつくり，**判別式 D の符号** を調べる。

D の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
共有点の個数	**2 個**	**1 個**	**0 個**
円と直線の位置関係	 **異なる 2 点で交わる**	 **接する**	 **共有点をもたない**

Warm Up

次の問いに答えなさい。

(1) 円 $(x+2)^2+y^2=10$ と直線 $y=-2x+1$ の共有点の座標を求めなさい。

(2) 円 $x^2+y^2=2$ と直線 $x-y+3=0$ の共有点の個数を求めなさい。

解説 (1) 円と直線の方程式を連立させる。

$$\begin{cases} (x+2)^2+y^2=10 \cdots\cdots① \\ y=-2x+1 \cdots\cdots② \end{cases}$$

②を①に代入して整理すると，

$5x^2-5=0$

これを解いて，$x=\pm1$ 　1 次式の方に代入する

②より，$x=1$ のとき $y=-1$，$x=-1$ のとき，$y=3$

よって，求める点の座標は $(1,\ -1)$，$(-1,\ 3)$

(2) 円と直線の方程式を連立させる。

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \cdots\cdots① \\ x-y+3=0 \cdots\cdots② \end{cases}$$

②より，$y=x+3 \cdots\cdots②'$

②' を①に代入して整理すると，

$2x^2+6x+7=0$

この式の判別式を D とすると，

$D=6^2-4\cdot2\cdot7=-20<0$

よって，共有点の個数は 0 個

Try

次の問いに答えなさい。

(1) 円 $x^2+y^2=4$ と直線 $x+y=2$ の共有点の座標を求めなさい。

(2) 円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y=2x-5$ の共有点の個数を求めなさい。

Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 次の円と直線の共有点の座標を求めなさい。

① $x^2+y^2=10$，$y=3x-10$　② $x^2+y^2=5$，$2x-y+5=0$　③ $(x-1)^2+y^2=10$，$x+3y-1=0$

(2) 次の円と直線の共有点の個数を求めなさい。

① $x^2+y^2=5$，$y=x+2$　② $x^2+y^2=2$，$2x+3y-6=0$　③ $(x+1)^2+(y-2)^2=5$，$x+2y+2=0$

3-21 円と直線の共有点②

Point!

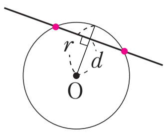
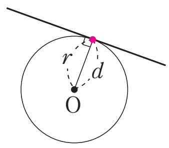
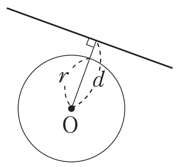
円と直線の位置関係が条件となる問題の解き方

・直線の式がわからない場合は，位置関係から判別式を利用する。

異なる２点で交わる⇒ $D>0$　接する⇒ $D=0$　共有点をもつ⇒ $D\geqq 0$

共有点をもたない⇒ $D<0$

・円の半径がわからない場合は，位置関係から（半径 r）と（円の中心と直線の距離 d）の大小を利用する。

円と直線の位置関係	 異なる２点で交わる	 接する	 共有点をもたない
r と d の大小	$r>d$	$r=d$	$r<d$

Warm Up

次の問いに答えなさい。

(1) 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=2x-k$ が異なる２点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めなさい。

(2) 円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $2x+y-5=0$ が接するとき，円の半径 r の値を求めなさい。

解説 (1) 直線の式がわからないので，

円と直線の式を連立し，判別式を利用する。

$5x^2-4kx+k^2-5=0$

この式の判別式を D とすると，

$D=(-4k)^2-4\cdot 5\cdot (k^2-5)$

$\quad =-4k^2+100>0$ …… 異なる２点で交わるとき，$D>0$

これを解いて，$-5<k<5$

(2) 円の半径がわからないので，

円の中心 $(0,\ 0)$ と直線の距離 d を求める。

$$d=\frac{|2\cdot 0+1\cdot 0-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$=\frac{|-5|}{\sqrt{5}}$$

$$=\sqrt{5}$$

よって，$r=\sqrt{5}$ …… 接するとき，$r=d$

Try

次の問いに答えなさい。

(1) 円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=mx+4$ が接するとき，定数 m の値を求めなさい。

(2) 円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $x-3y-10=0$ が共有点をもたないとき，円の半径 r の値の範囲を求めなさい。

Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 円 $x^2+y^2=8$ と直線 $y=x+m$ が接するとき，定数 m の値を求めなさい。

(2) 円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y=3x+n$ が共有点をもたないとき，定数 n の値の範囲を求めなさい。

(3) 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=2x+m$ が共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めなさい。

(4) 円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $y=x+2$ が接するとき，円の半径 r の値を求めなさい。

(5) 円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $4x-y+17=0$ が異なる２点で交わるとき，円の半径 r の値の範囲を求めなさい。

(6) 円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $3x+4y-10=0$ が共有点をもたないとき，円の半径 r の値の範囲を求めなさい。

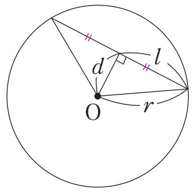
3-22 弦の長さ

Point!

弦の長さを求める問題では，まず図をかいて，**三平方の定理**を利用する。

円の半径を r，円の中心から弦にひいた垂線の長さを d，弦の長さの半分を l とおくと，

円の中心から弦にひいた垂線は弦を２等分するので，$\boldsymbol{r^2=d^2+l^2}$ が成り立つ。



Warm Up

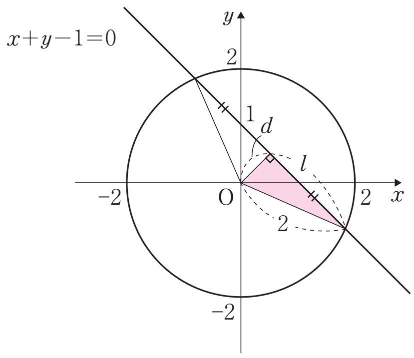
次の問いに答えなさい。

(1) 直線 $x+y-1=0$ が円 $x^2+y^2=4$ によって切り取られる弦の長さを求めなさい。

(2) 円 $x^2+y^2=3$ と直線 $x-y+k=0$ の２つの交点を結ぶ線分の長さが２となるような定数 k の値を求めなさい。

解説 (1) 弦の長さを求める問題なので，まず図をかいて考える。

円の中心 $(0,\ 0)$ から直線 $x+y-1=0$ にひいた垂線の長さを d とおくと，　垂線の長さは点と直線の距離



$$d=\frac{|1\cdot0+1\cdot0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

求める弦の長さの半分を l とすると，円の半径が２なので，

三平方の定理より，

$$l^2=2^2-d^2$$

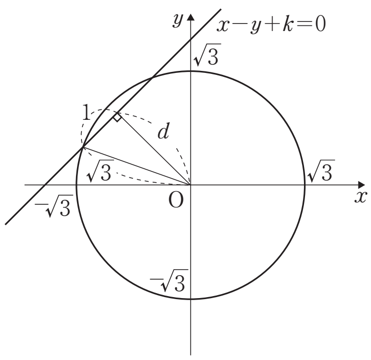
$$l^2=4-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$l^2=\frac{7}{2}\qquad l>0 \text{ より，} l=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

よって，求める弦の長さは，$2l=\underline{\sqrt{14}}$

(2) 円 $x^2+y^2=3$ と直線 $x-y+k=0$ の２つの交点を結ぶ線分は弦になるので，図をかいて考える。

円の中心 $(0,\ 0)$ から直線 $x-y+k=0$ にひいた垂線の長さを d とおくと，



$$d=\frac{|1\cdot0+(-1)\cdot0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$

$$d=\frac{|k|}{\sqrt{2}}\ \cdots\cdots①$$

また，弦の長さの半分が１，円の半径が $\sqrt{3}$ なので，三平方の定理より，

$$d^2=(\sqrt{3})^2-1^2$$

$$d^2=2\qquad d>0 \text{ より，} d=\sqrt{2}\ \cdots\cdots②$$

①，②より，$\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$|k|=2$　絶対値をはずすときは，± をつける

よって，$\underline{k=\pm2}$

Try

次の問いに答えなさい。

(1) 直線 $x+2y-5=0$ が円 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ によって切り取られる弦の長さを求めなさい。

(2) 円 $x^2+y^2=16$ と直線 $y=x+k$ の 2 つの交点を結ぶ線分の長さが $\sqrt{2}$ となるような定数 k の値を求めなさい。

Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 直線 $2x-y=5$ が円 $x^2+y^2=10$ によって切り取られる弦の長さを求めなさい。

(2) 直線 $x+y=4$ が円 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ によって切り取られる弦の長さを求めなさい。

(3) 直線 $x-y=2$ が円 $x^2+y^2=3$ によって切り取られる弦の長さを求めなさい。

(4) 円 $x^2+y^2=10$ と直線 $y=x+k$ の 2 つの交点を結ぶ線分の長さが $4\sqrt{2}$ となるような定数 k の値を求めなさい。

(5) 円 $(x-1)^2+y^2=5$ と直線 $y=x+k$ の 2 つの交点を結ぶ線分の長さが $3\sqrt{2}$ となるような定数 k の値を求めなさい。

(6) 円 $x^2+y^2+4x-2y-7=0$ と直線 $y=x+k$ の 2 つの交点を結ぶ線分の長さが 4 となるような定数 k の値を求めなさい。