1-12 順列②（隣り合う・両端）

Point!

- いくつかのものが隣り合う並び方 →❶ 隣り合うものを **1つのかたまり** として並べ，順列を考える。
  ❷ **❶のかたまりの中** の順列を考える。
  ❸ 積の法則により，❶ × ❷ が並び方の総数になる。
- 両端が指定された並び方 →❶ **両端だけ** を先に並べ，順列を考える。
  ❷ **残り** を並べ，順列を考える。
  ❸ 積の法則により，❶ × ❷ が並び方の総数になる。
- 「少なくとも～」のときは，**（すべての場合）－（それ以外の場合）** で解く。
- 必ず**図をかいて考える。**

Warm Up

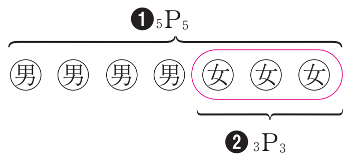
男子 4 人と女子 3 人が 1 列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか求めなさい。

(1) 女子 3 人が続いて並ぶ

(2) 両端が男子である

(3) 両端の少なくとも 1 人は女子である

解説 (1) 女子 3 人を 1 つのかたまりとして考える。



男子 4 人と女子のかたまりの並び方は，

${}_5P_5$ 通り

そのすべてにおいて，かたまりの中の女子 3 人の並び方は，

${}_3P_3$ 通り

よって，求める並び方の総数は，

${}_5P_5\times{}_3P_3=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\times3\cdot2\cdot1$

$=720$　　　　720 通り

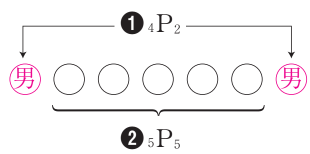
(2) まず両端の 2 人を男子 4 人から選んで並べると，その並び方は，

${}_4P_2$ 通り

そのすべてにおいて，その間に並ぶ残り 5 人の並び方は，

合計 7 人のうち男子 2 人はすでに両端に並べてある

${}_5P_5$ 通り



よって，求める並び方の総数は，

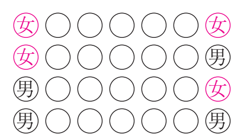
${}_4P_2\times{}_5P_5=4\cdot3\times5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$

$=1440$　　　　1440 通り

(3)「両端の少なくとも 1 人は女子」⇒「両端が男子ではない」ということなので，

全員を並べた場合の数から，

男子が両端に並ぶ場合の数をひいて求める。



全員を並べた場合の並び方は，

${}_7P_7$ 通り

両端が男子である並び方は，(2)より 1440 通り

よって，求める並び方の総数は，

${}_7P_7-1440=5040-1440$

$=3600$　　　　3600 通り

Try

男子 4 人と女子 5 人が 1 列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか求めなさい。

(1) 女子 5 人が続いて並ぶ

(2) 両端が女子である

(3) 両端の少なくとも一方が男子である

Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 男子 3 人と女子 4 人が 1 列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか求めなさい。

① 男子 3 人が続いて並ぶ

② 両端が女子である

③ 両端の少なくとも 1 人は男子である

(2) 女子 5 人，男子 3 人が 1 列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか求めなさい。

① 女子 5 人が続いて並ぶ

② 女子は女子，男子は男子でそれぞれ続いて並ぶ

③ 男子が両端に並ぶ

(3) 1 から 9 までの数字を 1 列に並べるとき，次のような並べ方は何通りあるか求めなさい。

① 偶数すべてが続いて並ぶ

② 両端が奇数である

③ 両端の少なくとも一方が奇数である

(4) QUESTION の文字をすべて使って順列をつくるとき，次のような並べ方は何通りあるか求めなさい。

① 母音の文字がすべて続いて並ぶ

② 両端が母音の文字である

③ 少なくとも一端が子音の文字である

1-24 重複組合せ

Point!

重複組合せ

n **種類**のものから r **個**のものを選ぶ組合せを，**重複組合せ**という。
同じ種類のものから複数個のものを選ぶときに使う。

〈例〉りんご，みかん，バナナの３種類の果物を７個買うとき
りんご２個，みかん４個，バナナ１個 のように同じ種類のものから複数個を選ぶ
⇒ 重複組合せを使う。

重複組合せを使うときは，r **個の**○を $n-1$ **個**の｜で仕切って考える。

〈例〉りんご，みかん，バナナの３種類の果物を７個買うとき
7 個の○を 2 個の｜で仕切って考える。
｜で仕切られた３つのグループを左からりんご，みかん，バナナとして，以下のように考えることができる。

$\underbrace{○○}_{\text{りんご}}｜\underbrace{○○○○}_{\text{みかん}}｜\underbrace{○}_{\text{バナナ}}$ → りんご２個，みかん４個，バナナ１個

$｜\underbrace{○○○}_{\text{みかん}}｜\underbrace{○○○○}_{\text{バナナ}}$ → りんご０個，みかん３個，バナナ４個

⇒ ○と｜の並び方の総数を考えればよい。

Warm Up

次の問いに答えなさい。

(1) りんご，なし，柿の３種類の果物を９個買うとき，何通りの買い方があるか求めなさい。ただし，１個も買わない果物があってもよいものとする。

(2) $x+y+z=6$ を満たす自然数 x，y，z の組は何通りあるか求めなさい。

解説 (1) ３種類の果物から９個の果物を選んで買うので，重複組合せを使う。
この並べ方の総数は，９個の○と２個の｜の順列の総数を考えればよい。

〈例〉りんご３個，なし２個，柿４個のとき
○○○｜○○｜○○○○
と表すことができる

よって，求める買い方は，

$$\frac{11!}{9!2!}=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\times2\cdot1}$$
$$=55$$

55 通り

(2) x，y，z は自然数なので，「6 個の 1 を x，y，z に配る」と考える。ただし，「少なくとも 1 個は配る」と考える。

↑ x，y，z は整数　　↑ x，y，z は 1 以上

まず，x，y，z のそれぞれに１個ずつ配ったことにし，残りの３個の配り方を考えればよい。
この並べ方の総数は，３個の○と２個の｜の順列の総数を考えればよい。

〈例〉$x=2$，$y=0$，$z=1$ のとき
○○｜　｜○
と表すことができる

よって，求める配り方は，$\dfrac{5!}{3!2!}=10$

10 通り

Try

次の問いに答えなさい。

(1) ぶどう，もも，なしの 3 種類の果物を 8 個買うとき，何通りの買い方があるか求めなさい。ただし，どの果物も少なくとも 1 個は買うものとする。

(2) 10 個のりんごを 5 人に配るとき，配り方は何通りあるか求めなさい。ただし，少なくとも 1 人に 1 個は配るものとする。

(3) $x+y+z=12$ の解について，次の問いに答えなさい。

① 負でない整数 x，y，z の組は何通りあるか求めなさい。

② 自然数 x，y，z の組は何通りあるか求めなさい。

Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 4 個の異なる文字の a，b，c，d から，重複を許して 9 文字取り出してつくる組み合わせは何通りあるか求めなさい。

(2) スイカ，メロン，バナナの 3 種類の果物を 11 個買うとき，何通りの買い方があるか求めなさい。ただし，1 個も買わない果物があってもよい。

(3) 候補者が 4 人，投票する人が 15 人いる無記名投票で，1 人 1 票投票するとき，票の分かれ方は何通りあるか求めなさい。

(4) A，B，C，D の商品がそれぞれ 6 個ずつある。この中から 6 個を選ぶ方法は何通りあるか求めなさい。ただし，どの商品も少なくとも 1 つは選ぶものとする。

(5) 10 本の鉛筆を 4 人の生徒に分けるとき，何通りの分け方があるか求めなさい。ただし，少なくとも 1 人に 1 本は分けるとする。

(6) 12 個のみかんを A，B，C，D の 4 人に配るとき，何通りの配り方があるか求めなさい。ただし，少なくとも 1 人に 1 個は配るものとする。

(7) $x+y+z=8$ を満たす 0 以上の整数 x，y，z の組は何通りあるか求めなさい。

(8) $x+y+z=15$ を満たす正の整数 x，y，z の組は何通りあるか求めなさい。

(9) $x+y+z=10$ の解について，次の問いに答えなさい。

① 0 以上の整数 x，y，z の組は何通りあるか求めなさい。

② 自然数 x，y，z の組は何通りあるか求めなさい。