3-10 2次関数の決定①

Point!

放物線の頂点や軸がわかっている場合は，$y=a(x-p)^2+q$ の形を利用する。

頂点 ➡ p，q に代入する。

軸 ➡ p に代入する。

通る点 ➡ x，y に代入する。

Warm Up

次の条件を満たす2次関数を求めなさい。

(1) グラフの頂点が$(-1,\ 3)$で，点$(1,\ 11)$を通る。

(2) グラフの軸が直線$x=1$で，2点$(-1,\ 9)$，$(2,\ 3)$を通る。

(3) $x=-2$で最大値5をとり，$x=-1$で$y=0$となるような2次関数を$y=ax^2+bx+c$の形で答えなさい。

解説 (1) 頂点$(-1,\ 3)$より，$p=-1$，$q=3$を

$y=a(x-p)^2+q$ に代入する。

$y=a(x+1)^2+3$……①

点$(1,\ 11)$を通るので，$x=1$，$y=11$を

①に代入する。

$11=a(1+1)^2+3$

整理すると，$11=4a+3$

これを解いて，$a=2$

これを①に代入して，

$y=2(x+1)^2+3$

(2) 軸$x=1$より，$p=1$を$y=a(x-p)^2+q$に代入する。

$y=a(x-1)^2+q$……①

点$(-1,\ 9)$を通るので，$x=-1$，$y=9$を①に代入する。

$9=a(-1-1)^2+q$

整理すると，$9=4a+q$……②

点$(2,\ 3)$を通るので，$x=2$，$y=3$を①に代入する。

$3=a(2-1)^2+q$

整理すると，$3=a+q$……③

②，③を連立方程式として解くと，

$a=2$，$q=1$

これを①に代入して，$y=2(x-1)^2+1$

(3) 定義域に制限がなく最大値をとるので，このグラフは上に凸である。

また，$x=-2$で最大値5なので，頂点は$(-2,\ 5)$である。

$p=-2$，$q=5$を$y=a(x-p)^2+q$に代入する。　$y=a(x+2)^2+5$……①

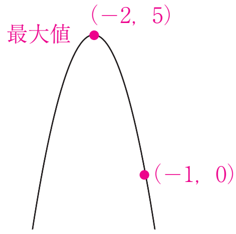
$x=-1$で$y=0$なので，これを①に代入する。

$0=a(-1+2)^2+5$

これを解いて，$a=-5$

これを①に代入して，$y=-5(x+2)^2+5$

したがって，$y=-5x^2-20x-15$



Try

次の条件を満たす２次関数を求めなさい。

⑴ グラフの頂点が$(-1,\ 3)$で，点$(1,\ 7)$を通る。

⑵ グラフの軸が直線$x=-1$で，２点$(0,\ 5)$，$(2,\ -3)$を通る。

⑶ $x=-3$で最小値-1をとり，$x=1$で$y=31$となるような２次関数を$y=ax^2+bx+c$の形で答えなさい。

Exercise

次の条件を満たす２次関数を求めなさい。

⑴ グラフの頂点が$(2,\ 3)$で，点$(3,\ 6)$を通る。

⑵ グラフの頂点が$(1,\ 3)$で，点$(0,\ 5)$を通る。

⑶ グラフの頂点が$(-3,\ -1)$で，点$(-1,\ 7)$を通る。

⑷ グラフの頂点が$(1,\ -2)$で，点$(2,\ -3)$を通る。

⑸ グラフの頂点が$(-3,\ 5)$で，点$(-4,\ 2)$を通る。

⑹ グラフの頂点が$(1,\ 2)$で，y軸と点$(0,\ -1)$で交わる。

⑺ グラフの軸が直線$x=2$で，２点$(0,\ 0)$，$(3,\ 6)$を通る。

⑻ グラフの軸が直線$x=-2$で，２点$(2,\ -2)$，$(-8,\ 3)$を通る。

⑼ グラフの軸が直線$x=2$で，２点$(2,\ 3)$，$(6,\ -5)$を通る。

⑽ $x=3$で最小値４をとり，$x=5$で$y=8$となるような２次関数を$y=ax^2+bx+c$の形で答えなさい。

⑾ $x=3$で最大値７をとり，$x=1$で$y=3$となるような２次関数を$y=ax^2+bx+c$の形で答えなさい。

⑿ $x=1$で最小値５をとり，$x=3$のとき$y=7$となるような２次関数を$y=ax^2+bx+c$の形で答えなさい。

3-11 2次関数の決定②

Point!

放物線が通る３点がわかっている場合は，$y=ax^2+bx+c$ の形を利用し，連立３元１次方程式をつくる。

通る点 ⟶ x，y に代入する。

連立３元１次方程式の解き方

❶ １文字を消去して，２文字の連立方程式を導く。

❷ ❶の連立方程式を解く。

❸ ❷を利用し，❶で消去した文字の値を求める。

Warm Up

２次関数のグラフが３点$(-1,\ 1)$，$(-2,\ -6)$，$(3,\ 9)$を通るとき，この２次関数を求めなさい。

解説 ３点$(-1,\ 1)$，$(-2,\ -6)$，$(3,\ 9)$をそれぞれ $y=ax^2+bx+c$ の x，y に代入する。

$$\begin{cases} 1=a-b+c \cdots\cdots ① \\ -6=4a-2b+c \cdots\cdots ② \\ 9=9a+3b+c \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②－①より，$-7=3a-b$……④

③－①より，$8=8a+4b$……⑤

④，⑤を連立して解くと，$a=-1$，$b=4$

これを①に代入して c を求めると，$c=6$

したがって，求める２次関数は，$y=-x^2+4x+6$

どの式を組合せても c が消去できる

②－①

$$\begin{array}{rr} & -6=4a-2b+c \\ -) & 1=a-b+c \\ \hline & -7=3a-b \end{array}$$

③－①

$$\begin{array}{rr} & 9=9a+3b+c \\ -) & 1=a-b+c \\ \hline & 8=8a+4b \end{array}$$

$y=ax^2+bx+c$ に

$a=-1$，$b=4$，$c=6$ を代入する

Try

２次関数のグラフが次の３点を通るとき，その２次関数を求めなさい。

(1) $(0,\ 3)$，$(1,\ 0)$，$(-1,\ 8)$　(2) $(-1,\ 1)$，$(0,\ -4)$，$(3,\ 5)$　(3) $(3,\ -7)$，$(-2,\ -17)$，$(1,\ 1)$

Exercise

２次関数のグラフが次の３点を通るとき，その２次関数を求めなさい。

(1) $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$，$(3,\ 8)$　(2) $(-1,\ 0)$，$(0,\ -3)$，$(4,\ 5)$　(3) $(-1,\ -6)$，$(1,\ 0)$，$(0,\ -4)$

(4) $(-2,\ 8)$，$(0,\ -2)$，$(1,\ -1)$　(5) $(2,\ 8)$，$(1,\ 7)$，$(0,\ 2)$　(6) $(0,\ -1)$，$(-1,\ -6)$，$(3,\ -10)$

(7) $(1,\ 4)$，$(3,\ 2)$，$(-2,\ -8)$　(8) $(1,\ 6)$，$(4,\ 3)$，$(-2,\ -9)$　(9) $(-1,\ 7)$，$(2,\ -2)$，$(1,\ -5)$

(10) $(-1,\ 11)$，$(1,\ 5)$，$(2,\ -7)$　(11) $(-1,\ 9)$，$(1,\ -1)$，$(2,\ 0)$　(12) $(-1,\ -2)$，$(2,\ 7)$，$(3,\ 18)$

3-12 2次関数の決定③

Point!

放物線 $y=ax^2+bx+c$ が平行移動しても，a は変わらない。

通る点 ⟶ x, y に代入する。

Warm Up

放物線 $y=2x^2+x-1$ を平行移動したものが，2点$(-1,\ 6)$，$(2,\ 3)$を通るとき，その放物線の方程式を求めなさい。

解説 放物線 $y=2x^2+x-1$ を平行移動したので，　放物線が平行移動しても，a は変わらない

$a=2$ を $y=ax^2+bx+c$ に代入する。

$y=2x^2+bx+c$……①

点$(-1,\ 6)$を通るので，$x=-1$，$y=6$ を①に代入する。

$6=2\times(-1)^2+b\times(-1)+c$

整理すると，$4=-b+c$……②

点$(2,\ 3)$を通るので，$x=2$，$y=3$ を①に代入する。

$3=2\times2^2+b\times2+c$

整理すると，$-5=2b+c$……③

②，③を連立方程式として解くと，$b=-3$，$c=1$

これを①に代入して，$\underline{y=2x^2-3x+1}$

Try

次の問いに答えなさい。

(1) 放物線 $y=2x^2+4x+3$ を平行移動したものが，2点$(1,\ 8)$，$(3,\ 2)$を通るとき，その放物線の方程式を求めなさい。

(2) 放物線 $y=-4x^2+5x+2$ を平行移動したものが，2点$(-2,\ 1)$，$(-3,\ -1)$を通るとき，その放物線の方程式を求めなさい。

Exercise

次の問いに答えなさい。

(1) 放物線 $y=x^2-3x-2$ を平行移動したものが，2点$(1,\ 2)$，$(2,\ 3)$を通るとき，その放物線の方程式を求めなさい。

(2) 放物線 $y=2x^2-7x-4$ を平行移動したものが，2点$(2,\ -1)$，$(5,\ 2)$を通るとき，その放物線の方程式を求めなさい。

(3) 放物線 $y=-x^2+4x+3$ を平行移動したものが，2点$(-1,\ 5)$，$(4,\ 0)$を通るとき，その放物線の方程式を求めなさい。

(4) 放物線 $y=-3x^2-3x+5$ を平行移動したものが，2点$(3,\ 1)$，$(-2,\ -9)$を通るとき，その放物線の方程式を求めなさい。